



TITLE:

大成算経の病題について(1): 虚題 第五 (『大成算経』の数学的・歴史 学的研究)

AUTHOR(S):

藤井, 康生

CITATION:

藤井, 康生. 大成算経の病題について(1): 虚題第五 (『大成算経』の数学的・歴史学的研究). 数理解析研究所講究録 2013, 1831: 1-15

ISSUE DATE:

2013-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/194842>

RIGHT:

大成算経の病題について (1) — 虚題第五 —

On ill-posed problems in the *Taisei Sankei* (1) — (Imaginary problems)

藤井康生 (Fujii, Yasuo)

四日市大学 関孝和数学研究所

Seki Kowa Institute of Mathematics, Yokkaichi University

1 はじめに

大成算経巻之十六 題術辯は、題として、全題、病題の 2 題を載せている。([柏原 2005, 208, 209 ページ], [小松 2007, 151, 153 ページ] を参照。) また、術として、実術、権術、偏術、邪術の 4 術を載せている。術については [藤井 2012] で発表した。

巻之十八病題擬については、京都大学数理解析研究所の RIMS 共同研究『『大成算経』の数学的・歴史的研究』(2012 年) で「虚題第五」について、第 2 回九州数学史シンポジウム (九州大学大学院数理学研究院) (2012 年) で「変題第六」について発表した。

本稿は RIMS 共同研究で発表した「虚題第五」についてまとめたものである。

病題とは、問題の与えられた条件が正しくない (不完全な) もののことで、大成算経巻之十八で詳細に述べられている。すなわち、巻之十八 病題擬では、病題が次の 8 つの項目に分けて論ぜられている。

転題第一：与えられた条件が足りないもの。

繁題第二：与えられた条件が過剰のもの。

層題第三：与えられた条件が不要に複雑になっているもの。例として約分をしていない、立方根にしているもの等載せている。

反題第四：与えられた条件が正しくなく、答えの値は求められても、大小関係などの題意に矛盾する。

虚題第五：与えられた条件では方程式の商が無い、負の商になる、商が求められても題意に反するなど、答えが求められないもの。

変題第六：与えられた条件では 2 つ以上の商が求められる。

□題第七：方程式の係数が 0 になるもの。(□は欠字)

散題第八：与えられた量が少数であったり、与えられた量の一方が大きく、他方が小さくその差が大きく計算が面倒なもの。

本稿では「虚題第五」について述べる。

本題に入る前に、方程式が商を持つための条件 (適尽方級法) について紹介する。([明治前, 381, 382 ページ], [後藤 2001, 135~138 ページ], [後藤 2002, 186~193 ページ] も参照。) 適尽方級法は、大成算経巻之三 前集変技の開方第三において述べられており、「虚題第五」で、自由自在に利用されているからである。

現在からみると、関数を表す記号が未発展であり、グラフを用いることができなかった状況の中で、式の値の変化を変式 (テーラー展開と同様の式) [明治前, 380, 381 ページ] を頼りに研究していたことは、注目すべき点である。後世の和算家は最大・最小問題の解法に展開させている。しかし、商を持たないこと、そのものに関心が薄かったようである。虚題を発展させ、書き遺した和算家は無かったようである。

2 卷之三変技 開方第三

大成算経卷之三開方第三の三式において方程式を3つに分類し、三式と呼んでいる。

全商式…商が1つの者、変商式…商が2つ以上ある者、無商式…商が無い者

この式の中で、病題において問題とするのは、変商式と無商式である。

方程式が商を持つかどうか、開方第三の替数で述べている所をまとめると以下のようになる。最高次の係数は正とする。¹[後藤 2002, 193, 194 ページ]

- 定数項 (実級) が負であれば正の商を持つ。²
- すべての項の係数が正であれば正の商を持たない。³
- 1次項の係数 (方級) から二番目に高次の項の係数の間に負の係数があれば,⁴
正の商を持つ場合がある。また係数の値を (符号は変えず) 替えて正の商を持つようにする事ができる。
- 負の商を持つときも、商を -商 とし正の商を持つときと同様にする。

2.1 適尽方級法

2 次方程式 (平方) のとき 平方適尽方級法 :

2 次式 $a + bx + cx^2$ に対して、式 $4ac - b^2$ (仮に適尽式 (A) と呼ぶ) を対応させる。

3 次方程式 (立方) のとき 立方適尽方級法 :

3 次式 $a + bx + cx^2 + dx^3$ に対して、式 $27a^2d^2 + 4ac^3 + 4b^3d - 18abcd - b^2c^2$ (仮に適尽式 (B) と呼ぶ) を対応させる。

4 次方程式 (三乗方) のとき 三乗方適尽方級法 :

4 次式 $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ に対して、式

$$\begin{aligned} & 256a^3e^3 - 192a^2bde^2 - 128a^2c^2e^2 + 144a^2cd^2e - 27a^2d^4 + 144ab^2ce^2 - 6ab^2d^2e \\ & - 80abc^2de + 18abcd^3 + 16ac^4e - 4ac^3d^2 - 27b^4e^2 + 18b^3cde - 4b^3d^3 - 4b^2c^3e + b^2c^2d^2 \end{aligned}$$

(仮に適尽式 (C) と呼ぶ) を対応させる。

5 次方程式 (四乗方) のとき 『大成算経』 卷之三には、5 次方程式の場合にも適尽式 (現代数学の用語では、判別式) が記述されている。また、適尽式 (判別式) は、(現代数学の用語で) 多項式とその導関数の終結式であり、行列式の計算で求められることが注記されている。

2.2 例題

『大成算経』では、適尽式の意味については良く理解されていない。卷之三では三つの例題を以て適尽式の利用方法を示しているが、記述内容は必ずしも正しくはないと思われる。

¹ 方程式を、 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0$ 、とし、 $a_n > 0$ とする。

² $a_0 < 0$

³ $a_0 > 0, a_1 > 0, \cdots, a_n > 0$

⁴ $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ の中に負のものがある。

[第 3-64 問]⁵ 次の 2 次方程式を考察する.

$$4 - 3x + x^2 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

2 次方程式 (1) は商を持たない. 平方適尽方級法によって, 商を持つときの係数の範囲を求める.
仮に定数項 (実級) を 0 とすると, 正の商を持つ. 次に 2 次項の係数 (廉級) を 0 とするとき, 正の商を持つ. このことから, 定数項 (実級) と 2 次項の係数を替えるときは, 適尽方級法により求めた値より小さいときに正の商を持つ.

1 次項の係数 (方) は負でなければならないので, 係数を替えるときは, 適尽方級法により求めた値より (絶対値が) 大きいときに正の商を持つ.

平方適尽方級法を用いて, 次が言える.

$a - 3x + x^2 = 0$ の場合, $a = a, b = -3, c = 1$ なので, 適尽式 (A) は $4a - 9 = 0$ である. したがって, $a < 9/4$ のとき商を持つ.

$4 - bx + x^2 = 0$ の場合, $a = 4, b = -b, c = 1$ なので, 適尽式 (A) は $4 \times 4 - b^2 = 0$ である. したがって, $b > 4$ のとき商を持つ.

$4 - 3x + cx^2 = 0$ の場合, $a = 4, b = -3, c = c$ なので, 適尽式 (A) は $4 \times 4c - 9 = 0$ である. したがって, $c < 9/16$ のとき商を持つ.

[第 3-65 問] 次の 3 次方程式を考察する.

$$-3 + 3x + 4x^2 + x^3 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

3 次方程式 (2) は負の商を持たない.⁶ 立方適尽方級法によって, 商を持つときの係数の範囲を求める.

仮に定数項 (実級) を 0 とすると, 方程式は $3x + 4x^2 + x^3 = 0$ となりその商は $x = -1, x = -3, x = 0$ である. すなわち負の商を持つ.

次に 1 次項の係数 (方級) を 0 とすると, 方程式は $-3 + 4x^2 + x^3 = 0$ となり $x = -1$ を商とする. すなわち負の商を持つ.⁷

また 3 次項の係数 (隅) を 0 とすると, 方程式は $-3 + 3x + 4x^2 = 0$ となり負の商を持つ.⁸

このことから, 定数項 (実級), 1 次項の係数 (方級), 3 次項の係数 (隅級) は立方適尽方級法により求めた値より小さいときに, 負の商を持つ.

2 次項の係数 (廉) は, 正でなければならないので, 立方適尽法により求めた値より大きいときに, 負の商を持つ.

立方適尽方級法によって, 次が言える.

$-a + 3x + 4x^2 + x^3 = 0$ の場合, $a = -a, b = 3, c = 4, d = 1$ なので, 適尽式 (B) は $27a^2 - 40a - 36 = 0$ であり. したがって, $a < 2.112612$ 弱 のとき負の商を持つ.⁹

$-3 + bx + 4x^2 + x^3 = 0$ の場合, $a = -3, b = b, c = 4, d = 1$ なので, 適尽式 (B) は $4b^3 - 16b^2 + 216b - 525 = 0$ である. したがって, $b < 2.605869$ 微弱 のとき負の商を持つ.¹⁰

⁵問題の番号は (巻数) - (各巻での番号) であらわす. 以下同様にする.

⁶実際, (2) を解くと $x = -2.27340913844 + 0.563821092829i, x = -2.27340913844 - 0.563821092829i, x = 0.546818276884$ となる.

⁷解くと $x = 0.791287847478, x = -1, x = -3.79128784748$ となる.

⁸解くと $x = 0.568729304409, x = -1.31872930441$ となる.

⁹適尽式を解くと $a = 2.11261179092, a = -0.631130309441$ となる.

¹⁰適尽式を解くと $b = 0.697065548704 + 7.06266074139i, b = 0.697065548704 - 7.06266074139i, b = 2.60586890259$ となる.

$-3 + 3x + cx^2 + x^3 = 0$ の場合, $a = -3, b = 3, c = c, d = 1$ なので, 適尽式 (B) は $12c^3 + 9c^2 - 162c - 351 = 0$ である. したがって, $c > 4.169813$ 強 のとき負の商を持つ.¹¹

$-3 + 3x + 4x^2 + dx^3 = 0$ の場合, $a = -3, b = 3, c = 4, d = d$ なので, 適尽式 (B) は $243d^2 + 756d - 912 = 0$ である. したがって, $d < 0.928964$ 強 のとき負の商を持つ.¹²

[第 3-66 問] 次の 4 次方程式を考察する.

$$3 - 2x + 0x^2 + 2x^3 + x^4 = 0 \quad \cdots (3)$$

4 次方程式 (3) は正の商も負の商も持たない.¹³ 三乗方適尽方級法によって, 商を持つときの係数の範囲を求める.

正の商を持つときを考える. 4 次項の係数 (隅), 3 次項の係数 (下廉) を 0 とする. 方程式 (3) は, $3 - 2x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 = 0$ となり $x = 3/2$ なる正の商を持つ. このことから, 三乗方適尽方級法により求めた値より小さいときに, 正の商を持つ.

3 次項の係数 (下廉) を 0 と置く. 方程式 (3) は $3 - 2x + 0x^2 + 0x^3 + ex^4 = 0$ となる. $a = 3, b = -2, c = 0, d = 0, e = e$ であるので, 適尽式 (C) は $6912e - 432 = 432(16e - 1) = 0$ である. したがって, $e < 0.0625$ のときは, 3 次項の係数 d を替えて正の商を持つようにできる.

4 次項の係数 (隅) を 0 と置く. 方程式 (3) は $3 - 2x + 0x^2 + dx^3 + 0x^4 = 0$ となる. $a = 3, b = -2, c = 0, d = d, e = 0$ であるので, 適尽式 (C) は $43d - 32 = 0$ である. したがって, $d < 0.13168$ 強 のときは, 4 次項の係数 e を替えて正の商を持つようにできる.

負の商を持つときを考える. 1 次項の係数 (方級) と定数項 (実級) を 0 とする. 方程式 (3) は $0 - 0x + 0x^2 + 2x^3 + x^4 = 0$ となり, $x = -2, 0$ なる負の商を持つ. このことから, 三乗方適尽方級法により求めた値より小さいときに, 負の商を持つ.

定数項 (実級) を 0 と置く. 方程式 (3) は, $0 - bx + 0x^2 + 2x^3 + x^4 = 0$ となる. $a = 0, b = -b, c = 0, d = 2, e = 1$ であるので, 適尽式 (C) は $-27b + 32 = 0$ である. したがって, $b < 1.185185$ 強 のときは, 定数項 a を替えて負の商を持つようにできる.

1 次項の係数 (方) を 0 と置く. 方程式 (3) は $a - 0x + 0x^2 + 2x^3 + x^4 = 0$ となる. $a = a, b = 0, c = 0, d = 2, e = 1$ であるので, 適尽式 (C) は $56a - 432 = 16(16a - 27) = 0$ である. したがって, $a < 1.6875$ のときは, 1 次項の係数 b を替えて負の商を持つようにできる.

3 卷之十八病題擬 虚題第五 (加辞・替数)

卷之十八虚題第五には [第 18-21]~[第 18-26] まで 6 題がある. これらは無商者 (商を持たない例題), 有負数者 (負の商を持つ例題), 得数背者 (得られた商が問題の条件に反する例題) に, それぞれ 2 題ずつ配置されている. また各問題では, 問題文がまず述べられ, ついで適尽方級法の計算がなされ, その後替数 (商を持つように与えられたパラメータを変えること), 加辞 (商を持つための条件を求めること) が述べられている. 適尽式が自由に利用されていることは特記すべきことと思う.

以下では, これらの術文を現代式の記号で書き換え, 脚注に現代数学的なコメントを書く.

¹¹ 適尽式を解くと $c = -2.4599066324 + 0.9816111925261i, c = -2.4599066324 - 0.9816111925261i, c = 4.16981326481$ となる.

¹² 適尽式を解くと $d = 0.928964419444, d = -4.04007553056$ となる.

¹³ 実際, (3) を解くと $x = 0.6649720476 + 0.626548041312i, x = 0.6649720476 - 0.626548041312i, x = -1.6649720476 + 0.906508298531i, x = -1.6649720476 - 0.906508298531i$ となり, 実数の商は無い.

3.1 無商者

[第 18-21 問] 長方形がある。面積は 230 寸である。只云う、縦 (平) と横 (長) の和は 3 尺。縦の長さを問う。¹⁴

縦 (平) を未知数とする。 $-230 + 30 \text{ 平} - \text{平}^2 = 0$ 。この方程式は商を持たない。

まず、先の方程式を得るための傍書式を求める。和 $- \text{平} = \text{長}$ 、 $\text{平} \times (\text{和} - \text{平}) = \text{積}$ を左に寄せる。(問題に与えられた) 積を左に寄せたると相消し、平に関する方程式を得る。

$$- \text{積} + \text{和} \times \text{平} - \text{平}^2 = 0 \quad \dots (1)$$

これは、問題で問われている縦 (平) を未知数とする方程式で、真術という。($- \text{積}$ を負実 (負の実級) a 、 和 を正方 (正の方級) b 、 -1 を負廉 (負の廉級) c と呼ぶ。)

平方適尽方級法を用いる。正方 $b(\text{和})$ は適尽式 (A) $b^2 - 4ac = 0$ において自乗であり次数が高いため、問題に与えられた値を用いる。負実 $a(- \text{積})$ は次数が低いので、適尽式 (A) によって商 (極数) を求める。

積を未知数とする。 $4(- \text{積}) \times (-1) = 4 \text{ 負実} \times \text{負廉}$ を左に寄せる。 $\text{和}^2 = \text{正方}^2$ を左に寄せたると相消し適尽式 (A) $-\text{和}^2 + 4 \text{ 積} = 0$ を得る。これを解けば $\text{積} = \text{和}^2/4$ 。

また、平が増加して長 (満極) となる場合を考える。それは、縦と横が等しいときであり、長方形は正方形 (方) となる。只云う数は $\text{只} = 2 \text{ 平} = 2 \text{ 長}$ である。 $\text{平} \times \text{長} = \text{積}$ なので、積を未知数とする方程式

$$- \text{只}^2 + 4 \text{ 積} = 0$$

を得るが、適尽式 (A) とまったく同じなので用いない。

替数 縦横の和を 30 とするとき、商を持たないときの面積の値の限界 (極) は 225 である。

術¹⁵ 適尽式 (A) は $-30^2 + 4S = 0$ であり、解けば $S = 225$ となる。面積が極以下なら商をもち、極以上なら商を持たない。

割注において次のように述べている。「商が無い、商が負である、正の商を得たとしても驗さなければならない、負の数を持つもの、数を得ても題意に背くものには限界の数 (極数) はない。商が 2 つ以上有るとき (変商) はこれを驗す。商が無いとき、負数を有するとき、数を得ても題意に反するものは用いない。条件が合えばすべて用いる。」「最小の適尽方級法の商以下で元の方程式の商が無ければ、次に大きい適尽方級法の商までは、元の方程式の商が有り、その次に大きい適尽方級法の商までは商が無い、元の方程式に商が有るか無いかは交互に現れる。」後半は元の方程式の値の変化が連続的に起こり、その境界が適尽方級法の商であることを述べている。

加辞 面積の 4 倍が縦横の和の 2 乗より大きいときは商を持たない。[加辞とは、この命題を問題に追加すること。]

¹⁴[関全集, 186 頁] 病題明致之法に同じ問題あり。また, [加藤 1957, 328 頁] を見よ。

¹⁵術文では、根拠 (結論のみちびき方) が述べられている。

術 適尽式 (A) は, $f(\text{積}) = 4\text{積} - \text{和}^2$ であり, その変式は次の通り.¹⁶

$$f(\text{積} + t) = f(\text{積}) + f'(\text{積})t = (4\text{積} - \text{和}^2) + 4t, \quad f'(\text{積}) = 4$$

ここで面積は, 平方適尽方級法の適尽式 (A) の商のときが限界 (極) でそれより小さいとき元の方程式が商を持つのであった. $t > 0$ に対して $\text{積} + t$ とすると $\text{積} + t$ が平方適尽方級法の適尽式 (A) の商とすることができる. これは上記適尽方級法の変式に他ならない. この変式において正の商 ($t > 0$) を持つためには, 変式の定数項 (実級) が負であればよい.

4 積 - 和² < 0 であれば方程式 (1) が商を持つ.

4 積 - 和² > 0 であれば方程式 (1) が商を持たない.

[第 18-22 問] 長い方の対角線を底辺とする, 菱形を半分にした二等辺三角形 (半稜) がある. 只云う, 面積と高さ (闊) の和は 5 寸. 又云う, 一边 (面) と 高さの積を 4 寸. 高さを問う.¹⁷

数値を用いて書けば, 高さ (闊) を求める方程式は次の通り.

$$9 - 10\text{闊} + \text{闊}^2 + \text{闊}^4 = 0.$$

この方程式は商を持たない. そこでここでは商を持つための只と又に対する条件を考察する.

まず, 先の方程式を得るための傍書式を求める. $2\text{積} = \text{長} \times \text{闊}$, $\text{面}^2 = \text{闊}^2 + (\text{長}/2)^2$ が成立する. $\text{又}^2 = \text{面}^2 \times \text{闊}^2$ であるので, $\text{又}^2 = \{\text{闊}^2 + (\text{積}/\text{闊})^2\} \text{闊}^2$ となる.

分母を払って $\text{闊}^4 + \text{積}^2 - \text{又}^2 = 0$ となる. $\text{積} = \text{只} - \text{闊}$ を代入して整理すると, 闊に関する方程式 (真術) を得る.

$$(\text{只}^2 - \text{又}^2) - 2\text{只} \times \text{闊} + \text{闊}^2 + \text{闊}^4 = 0 \quad \dots \quad \text{真術}$$

上式に三乗方適尽方級法を用い適尽式 (C) を求め, 又云う数を未知数として整理する.

三乗方適尽方級法では, 4 次式 $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ に対し, 適尽式 (C) を対応させる.

$$D = 256a^3e^3 - 192a^2bde^2 - 128a^2c^2e^2 + 144a^2cd^2e - 27a^2d^4 + 144ab^2ce^2 - 6ab^2d^2e - 80abc^2de + 18abcd^3 + 16ac^4e - 4ac^3d^2 - 27b^4e^2 + 18b^3cde - b^3d^3 - 4b^2c^3e + b^2c^2d^2.$$

上の D で $d = 0$ として共通項 e で割る.

$$D/e = 256a^3e^2 - 128a^2c^2e + 144ab^2ce + 16ac^4 - 27b^4e - 4b^2c^3$$

以下 D/e を計算する.

$a = \text{只}^2 - \text{又}^2$, $b = -2\text{只}$, $c = 1$, $d = 0$, $e = 1$ であるので, 正項は

$$256a^3e^2 = 256(\text{只}^2 - \text{又}^2)^3 = 256\text{只}^6 - 768\text{只}^4 \times \text{又}^2 + 768\text{只}^2 \times \text{又}^4 - 256\text{又}^6,$$

$$144ab^2ce = 144(-2\text{只})^2(\text{只}^2 - \text{又}^2) = 576\text{只}^4 - 576\text{只}^2 \times \text{又}^2,$$

$$16ac^4 = 16(\text{只}^2 - \text{又}^2) = 16\text{只}^2 - 16\text{又}^2$$

¹⁶明治前日本数学史第二巻 380・381 ページ に従い本稿では, 変式を表すのに微分係数を用いる.

¹⁷[関全集, 186 頁] 病題明致之法に同じ問題あり. また, [加藤 1957, 329 頁] 参照.

であり、これ等を足して、

$$256a^3e^2 + 144ab^2ce + 16ac^4 = (256 \text{ 只}^6 + 576 \text{ 只}^4 + 16 \text{ 只}^2) \\ + (-768 \text{ 只}^4 - 576 \text{ 只}^2 - 16) \text{ 又}^2 + 768 \text{ 只}^2 \times \text{又}^4 - 256 \text{ 又}^6$$

を左に寄せる。次に負項は、

$$128a^2c^2e = 128(\text{只}^2 - \text{又}^2)^2 = 128 \text{ 只}^4 - 256 \text{ 只}^2 \times \text{又}^2 + 128 \text{ 又}^4,$$

$$27b^4e = 27(-2 \text{ 只})^4 = 432 \text{ 只}^4, \quad 4b^2c^3 = 4(-2 \text{ 只})^2 = 16 \text{ 只}^2$$

であり、足し合わせて得られる

$$128a^2c^2e + 27b^4e + 4b^2c^3 = (560 \text{ 只}^4 + 16 \text{ 只}^2) - 256 \text{ 只}^2 \times \text{又}^2 + 128 \text{ 又}^4$$

と、左に寄せたると相消して次式を得る。

$$(-256 \text{ 只}^6 - 16 \text{ 只}^4) + (768 \text{ 只}^4 + 320 \text{ 只}^2 - 16) \text{ 又}^2 + (-768 \text{ 只}^2 + 128) \text{ 又}^4 + 256 \text{ 又}^6 = 0$$

16 で割って、「適尽式」をえる。

$$(-16 \text{ 只}^6 - \text{只}^4) + (48 \text{ 只}^4 + 20 \text{ 只}^2 + 1) \text{ 又}^2 + (-48 \text{ 只}^2 + 8) \text{ 又}^4 + 16 \text{ 又}^6 = 0 \quad \dots \text{ 第1式}$$

また、闊が増大したときの限界 (満極) を考える。すなわち、闊 = 長/2 のとき、図形は正方形を半分にしたものになる。積 = 闊²。よって 只 = 闊 + 闊²、又は旧のまま、すなわち式を得難い。闊が減少して 0 になる (干極) と、図形は直線になるので適さない。

只云う数、又云う数を既知とし、闊を未知数とする。只 = 闊² + 闊 であるので、

$$-\text{只} + \text{闊} + \text{闊}^2 = 0 \quad \dots \text{ 前式}$$

2 闊² = 面²、又² = 面² × 闊² = 2 闊⁴ であるので

$$-\text{又}^2 + 2 \text{ 闊}^4 = 0 \quad \dots \text{ 後式}$$

前式より

$$\text{只}^2 - 2 \text{ 只} \times \text{闊} + \text{闊}^2 - \text{闊}^4 = 0$$

2(上式) + (後式) として次を得る。

$$2 \text{ 只}^2 - \text{又}^2 - 4 \text{ 只} \times \text{闊} + 2 \text{ 闊}^2 = 0$$

(上式) - 2(前式) として次を得る。

$$(2 \text{ 只}^2 + 2 \text{ 只} - \text{又}^2) + (-4 \text{ 只} - 2) \text{ 闊} = 0 \quad \dots \text{ 一式}$$

(一式) × 闊 - 前式 × (-4 只 - 2) として次を得る。

$$(-4 \text{ 只}^2 - 2 \text{ 只}) + (2 \text{ 只}^2 + 6 \text{ 只} + 2 - \text{又}^2) \text{ 闊} = 0 \quad \dots \text{ 二式}$$

一式と二式を維乗し¹⁸、

$$(2 \text{ 只}^2 + 2 \text{ 只} - \text{又}^2)(2 \text{ 只}^2 + 6 \text{ 只} + 2 - \text{又}^2) - (-4 \text{ 只} - 2)(-4 \text{ 只}^2 - 2 \text{ 只}) = 0$$

¹⁸ $a + bx = 0, c + dx = 0$ より x を消去し $ad - bc = 0$ を得ること。

整理して、又云う数を未知数とする方程式を得る.

$$4\text{只}^4 + (-4\text{只}^2 - 8\text{只} - 2)\text{又}^2 + \text{又}^4 = 0 \quad \dots \quad \text{第2式}$$

替数 只云う数を5と定め、又云う数に対する条件を求める.

商が無いときの又云う数の極数は4.062208強である.

闊が増大し長の半分となったときの又云う数の極数は4.537804強である.

術 適尽式(第1式)において $\text{只} = 5$ とすると,

$$-250625 + 30501\text{又}^2 - 1192\text{又}^4 + 16\text{又}^6 = 0$$

となる. これを数値的に解くと、 $\text{又} = 4.062208$ を得る. これが無商の極数で,

$\text{又} > 4.062208$ のとき、商があり、 $\text{又} < 4.062208$ のとき、商が無い.

実際、只云う数を5とすると、真術は次のように書ける.

$$25 - \text{又}^2 - 10x + \text{闊}^2 + \text{闊}^4 = 0 \quad \dots \quad (*)$$

$\text{又} = 5$ とすると、 $-10x + \text{闊}^2 + \text{闊}^4 = 0$. この方程式は正の商2を持つ. よって、真術は、又云う数が4.062208より大きいときに商を持ち、小さいときに商を持たない.

(第2式)において、 $\text{只} = 5$ とすると,

$$2500 - 142\text{又}^2 + \text{又}^4 = 0 \quad \dots \quad (**)$$

この方程式を疊商術¹⁹を用いて商を求めと,

$$\text{少} = 4.53780424385, \quad \text{多} = 11.0185449423$$

の二つがある. 多は条件に背くので用いない. 少を用いる.

闊が増大したときの満極は少で、闊が少より小さいときは $\text{長}/2 > \text{闊}$ を満たし、少より大きいときは条件に背く.

実際、又の方程式(*)の正商の小さいほう $\text{少} = 4.53780424385$ より小さいときに、 $\text{長}/2 > \text{闊}$ を満たす. $\text{又} = 11.0185449423(\text{多})$ については、元の方方程式の商を考えれば負の商に対して、 $\text{長}/2 = \text{闊}$ を満たすことになり条件に背く.

(替数)の纏め: $4.062208\text{強} < \text{又} < 4.537804\text{強}$ を満たすように、又云う数を替えれば良いことが分かる.

加辞 $48\text{只}^4 \times \text{又}^2 + 20\text{只}^2 \times \text{又}^2 + 16\text{又}^6 + 8\text{又}^4 + \text{又}^2 < 16\text{只}^6 + \text{只}^4 + 48\text{只}^2 \times \text{又}^4$ のとき、商を持たない.

$4\text{只}^4 + \text{又}^4 < 4\text{只}^2 \times \text{又}^2 + 8\text{只} \times \text{又}^2 + 2\text{又}^2$ または、 $\text{又}^2 > 2\text{只}^2 + 4\text{只} + 1$ のとき、 $\text{長}/2 < \text{闊}$.

術 前段の傍書式(第1式)は又の奇数次の項が無いので 又^2 を未知数とする3次方程式と考えられる.

$$f(\text{又}^2) = (-16\text{只}^6 - \text{只}^4) + (48\text{只}^4 + 20\text{只}^2 + 1)\text{又}^2 + (-48\text{只}^2 + 8)\text{又}^4 + 16\text{又}^6$$

¹⁹ 又^2 を未知数とする複2次式と考える.

と置いて変式 $f(\text{又}^2 + t)$ を開出法（組立除法）で求めると、

$$f(\text{又}^2 + t) = f(\text{又}^2) + f'(\text{又}^2)t + \frac{1}{2}f''(\text{又}^2)t^2 + \frac{1}{2 \times 3}f'''(\text{又}^2)t^3$$

であるので、 f の導関数が求められる。

$$f'(\text{又}^2) = (48 \text{ 只}^4 + 20 \text{ 只}^2 + 1) + 2(-48 \text{ 只}^2 + 8) \text{ 又}^2 + 48 \text{ 又}^4,$$

$$\frac{1}{2}f''(\text{又}^2) = (-48 \text{ 只}^2 + 8) + 48 \text{ 又}^2, \quad \frac{1}{2 \times 3}f'''(\text{又}^2) = 16$$

すなわち、変式の実級が $f(\text{又}^2)$ 、方級が $f'(\text{又}^2)$ 、廉級が $\frac{1}{2}f''(\text{又}^2)$ 、隅級が $\frac{1}{3!}f'''(\text{又}^2)$ である。

先に見たように、 $\text{又} < 4.062208 \text{ 強}$ のとき、商を持たなかった。これは上記変式が正の商 ($t > 0$) を持つときであるので、変式の実級 $f(\text{又}^2)$ が負であればよい。

後段の傍書式（第2式）も又の奇数次の項が無いので 又^2 を未知数とする2次方程式と考えられる。

$$g(\text{又}^2) = 4 \text{ 只}^4 + (-4 \text{ 只}^2 - 8 \text{ 只} - 2) \text{ 又}^2 + \text{又}^4$$

と置いて、開出法で変式 $g(\text{又}^2 + t)$ を求めると、その係数として g の導関数が求められる。

$$g'(\text{又}^2) = (-4 \text{ 只}^2 - 8 \text{ 只} - 2) + 2 \text{ 又}^2, \quad \frac{1}{2}g''(\text{又}^2) = 1$$

先に見たように、 $4.537804 \text{ 強} < \text{又}$ のとき、商は条件に背いた。この不等式は、変式の実級が負 $g(\text{又}^2)$ であるか、方級 $g'(\text{又}^2)$ が正であると言い換えられる。

3.2 有負数者

[第18-23問] 米3石、麦5石がある。併せた価格は銀150銭である。只云う、米石価と麦石価の和は60銭。米石価を問う。

暗黙裡に、 $0 < \text{麦石価} < \text{米石価}$ が仮定されている。

本題に与えられた数を用いて米1石の価格（米石価）を得る方程式は、 $-150 + 2 \text{ 米石価} = 0$ で、これを解き米石価75銭を得、只云う数より減じ麦1石の価格（麦石価） -15 銭を得る。これは題意に反する。

麦石価を求める方程式を求める。負の値を得ることになるが先に求める。

米 \times 米石価 + 麦 \times 麦石価 = 共価銀に 只 = 米石価 + 麦石価 を代入して、

$$(\text{只} \times \text{米} - \text{共価銀}) + (\text{麦} - \text{米}) \times \text{麦石価} = 0 \quad \dots \quad \text{真術}$$

を得る。本文に与えられた数値を代入すると、

$$(60 \times 3 - 150) + (5 - 3) \times \text{麦石価} = 0 \quad \dots \quad (1)$$

この式は1次式で、必ず根を持つので適方級法を用いる必要がない。麦石価を求める式(1)は、実級と方級のどちらも正であるから、商は負になるので求めるに及ばない。

また、米石価と麦石価が等しいとする (麦石価が増大した満極である)。

未知数を只云う数とする。米石価 = 麦石価 なので、 $\text{只} = 2 \text{ 米 (麦) 石価}$ で、 $\text{米} \times \text{只} = 2 \text{ 米価格}$ 、 $\text{麦} \times \text{只} = 2 \text{ 麦価格}$ となる。 $(\text{米} + \text{麦}) \times \text{只}$ を左に寄せる。

2 共価銀 を左に寄せたると相消して次式を得る。

$$-2 \text{ 共価銀} + (\text{米} + \text{麦}) \times \text{只} = 0 \quad \dots (2)$$

解けば、 $\text{只} = 300/8 = 37.7$ 。

次に、麦石価を 0 とする (麦石価が減少したときの干極)。

未知数を只云う数 (この場合、米石価) とする。 $\text{只} \times \text{米}$ を左に寄せる。

共価銀と左に寄せたると相消して、 $- \text{共価銀} + \text{米} \times \text{只} = 0$ 。これを解けば、 $\text{只} = 150/3 = 50$ 。

替数 米 3 石、麦 5 石と定め、併せた価格は銀 150 銭とする。

麦石価が負になるときの只云う数の極は 50 銭である。

米石価と麦石価が等しくなるときの只云う数の極は 37.5 銭である。

術 真術で麦石価 = 0 とすれば、 $\text{只} = \text{共価銀} / \text{米} = 150/3 = 50$ となる。

米石価と麦石価が等しいときは、中段式 (2) より

$$\text{只} = 2 \text{ 共価銀} / (\text{米} + \text{麦}) = 2 \times 150/8 = 37.5.$$

加辞 $\text{只} \times \text{米} > \text{共価銀}$ のとき、麦石価が負になり、題意に反する。

$\text{只} \times \text{米} + \text{只} \times \text{麦} < 2 \text{ 共価銀}$ のとき、米石価より麦石価が高くなり、題意に反する。

術 真術より、 $\text{麦} - \text{米} = 5 - 3 = 2$ なので、実級 $\text{只} \times \text{米} - \text{共価銀} > 0$ のとき、麦石価が負で、実級 $\text{只} \times \text{米} - \text{共価銀} < 0$ のとき、麦石価が正である。

中段傍書式 (2) に於いて $f(\text{只}) = -2 \text{ 共価銀} + \text{只} \times \text{米} + \text{只} \times \text{麦}$ の変式 $f(X + \text{只})$ を考える。

$$f(X + \text{只}) = f(\text{只}) + f'(\text{只})X, \quad f'(\text{只}) = \text{米} + \text{麦}$$

であるので、変式が正の商 X を持つためには、実級が負でなければならない。

[問題 18-24] 4 角柱がある。只云う、体積の内から一辺 (方) の 48 倍を引いた余りは 184 寸。又云う高さで一辺の自乗を併せて 26 寸とする。一辺を問う。

題中の数値を用いて方を求める方程式は次の通り。

$$184 + 48 \text{ 方} - 26 \text{ 方}^2 + \text{方}^4 = 0$$

これを解くと $\text{方} = \text{負} 2 \text{ 寸} (-2 \text{ 寸})$ を得る。²⁰

次に、先の方程式を得るための傍書式を求める。

$\text{只} = \text{積} - 48 \text{ 方} = 184$, $48 = \text{箇数}$, $\text{又} = \text{高} + \text{方}^2 = 26$, $\text{方}^2 \times \text{高} = \text{只} + 48 \text{ 方}$, $\text{高} = \text{又} - \text{方}^2$ より高を消去し、 $\text{方}^2(\text{又} - \text{方}^2) = \text{只} + \text{箇数} \times \text{方}$ を得る。これを整理すると、真術を得る。

$$\text{只} + \text{箇数} \times \text{方} - \text{又} \times \text{方}^2 + \text{方}^4 = 0 \quad \dots \text{真術}$$

²⁰ $(\text{方} + 2)(\text{方}^3 - 2 \text{ 方}^2 + 48 + 184) = 0$ より、 $\text{方} = -2, -5.3420660, 3.6710330 \pm 1.9352824i$

三乗方適尽方級法を用いる。只云う数を未知数とする。 $a = \text{只}$, $b = \text{箇数}$, $c = -\text{又}$, $d = 0$, $e = 1$ より,

$$256a^3e^3 = 256 \text{ 只}^3, \quad 144ab^2ce = -144 \text{ 只} \times \text{箇数}^2 \times \text{又}, \quad 16ac^4 = 16 \text{ 只} \times \text{又}^4$$

が正項で,

$$-128a^2c^2e = -128 \text{ 只}^2 \times \text{又}^2, \quad -27b^4e = -27 \text{ 箇数}^4, \quad -4b^2c^3 = 4 \text{ 箇数}^3 \times \text{又}^3$$

が負項である。三つの正項をたし合わせ, $256 \text{ 只}^3 - 144 \text{ 只} \times \text{箇数}^2 \times \text{又} + 16 \text{ 只} \times \text{又}^4$ を左に寄せる。次に三つの負項をたし合わせ, $128 \text{ 只}^2 \times \text{又}^2 + 27 \text{ 箇数}^4 - 4 \text{ 箇数}^3 \times \text{又}^3$ と左に寄せたると相消して次式を得る。

$$4 \text{ 箇数}^2 \times \text{又}^3 - 27 \text{ 箇数}^4 + (16 \text{ 又}^4 - 144 \text{ 箇数}^2 \times \text{又}) \text{ 只} - 128 \text{ 又}^2 \times \text{只}^2 + 256 \text{ 只}^3 = 0 \quad \dots (1)$$

替数 又云う数を 26 寸, 箇数を 48 と定めるとき, 負の商を持つ只云う数の極は 9 寸である。

術 三乗方適尽方級法の傍書式 (1) に, 定めた又云う数, 箇数を代入する。

$$\begin{aligned} 4 \text{ 箇数}^2 \times \text{又}^3 - 27 \text{ 箇数}^4 &= 18653184 \quad \text{定数項 (正実)}, \\ 144 \text{ 箇数}^2 \times \text{又} - 16 \text{ 又}^4 &= 1314560 \quad \text{1 次係数 (負方)}, \\ 128 \text{ 又}^2 &= 86528 \quad \text{2 次係数 (負廉)}, \quad 256 \quad \text{3 次係数 (正隅)} \end{aligned}$$

である。よって,

$$18653184 - 1314560 \text{ 只} - 86528 \text{ 只}^2 + 256 \text{ 只}^3 = 0$$

を得る。 $256(\text{只}^3 - 338 \text{ 只}^2 - 5135 \text{ 只} + 72864) = 0$ は因数分解できて,

$$256(\text{只} - 352)(\text{只} - 9)(\text{只} + 23) = 0$$

となる。只は正であるので, 多 = 352, 少 = 9 が正の商である。多 = 352 のとき正の商を持たない。少 = 9 のとき正の商を持つ。故に 9 を極数とする。

只 > 352 のとき商を持たない。只 ≤ 9 のとき正の商を持つ (正の商 2 個, 負の商 2 個を持つ)。 $9 < \text{只} \leq 352$ のとき負の商を持つ。

本文割注に「此数己下無負商己上有負商」とある。此の数を上記の極 9 とすると, 9 より小さいとき ($0 < \text{只} < 9$) も負の商が有る。9 より大きいときも, 352 より大きいときは商を持たない。「己下無負商己上有負商」とあるのは, 「己下有正商己上無正商」と思われるが不明?

加辞

$$256 \text{ 只}^3 + 16 \text{ 只} \times \text{又}^4 + 4 \text{ 又}^3 \times \text{箇数}^2 < 128 \text{ 只}^2 \times \text{又}^2 + 144 \text{ 只} \times \text{又} \times \text{箇数}^2 + 27 \text{ 箇数}^4,$$

または $6 \text{ 只} > \text{又}^2$ のとき 負の商を持つ。

術 三乗方適尽方級法の傍書式 (1) に於いて,

$$\begin{aligned} f(\text{只}) &= 256 \text{ 只}^3 + 16 \text{ 只} \times \text{又}^4 + 4 \text{ 又}^3 \times \text{箇数}^2 - 128 \text{ 只}^2 \times \text{又}^2 \\ &\quad - 144 \text{ 只} \times \text{又} \times \text{箇数}^2 - 27 \text{ 箇数}^4 \end{aligned}$$

と置いて、開出法により変式 $f(X + \text{只})$ を求めると

$$f(X + \text{只}) = f(\text{只}) + f'(\text{只})X + \frac{1}{2}f''(\text{只})X^2 + \frac{1}{2 \times 3}f'''(\text{只})X^3$$

であるので、導関数が求められる。

$$\begin{aligned} f'(\text{只}) &= 768 \text{ 只}^2 + 16 \text{ 又}^4 - 256 \text{ 只} \times \text{又}^2 - 144 \text{ 又} \times \text{箇数}^2, \\ \frac{1}{2}f''(\text{只}) &= 768 \text{ 只} - 128 \text{ 又}^2, \quad \frac{1}{2 \times 3}f'''(\text{只}) = 256 \end{aligned}$$

少商のとき (只 = 9) 方・廉ともに負であり、多商のとき (只 = 352) 方・廉ともに正であるので、変式の実級が負、または廉級が正のとき、正商を持たない。

廉が正には、正商、負商を共に持たないときを含んでいると思われるが、本文に「有負商」とあるのは不明？

3.3 得数背者

[第 18-25 問] 等脚台形がある。上底 (上闊) は 1 尺 2 寸、対角線 (内斜) は 1 尺 5 寸である。只云う、斜辺 (外斜) の 2 倍と下底 (下闊) の和は 2 尺 3 寸。下底を問う。

暗黙裡に、外斜 $> (\text{下} - \text{上})/2$ が仮定されている。

題中の数値を用いれば、下底 (下) は方程式 $-371 + 2 \text{ 下} + \text{下}^2 = 0$ を満たす。この方程式を解けば、 $\text{下} = \sqrt{372} - 1 = 18.2873015$ を得る。このとき、

$$(\text{下} - \text{上})/2 = 3.14365, \quad \text{外} = (\text{只} - \text{下})/2 = 2.35635$$

であるので、外 $< (\text{下} - \text{上})/2$ となり暗黙の仮定に反する。

次に、上の方程式を一般に得るための傍書式を求める。内斜を内、外斜を外、上闊を上、下闊を下とする。高さ (長) を長とする。只 $= 2 \text{ 外} + \text{下} = 23$ より 外 $= (\text{只} - \text{下})/2$ である。外² $= \text{長}^2 + (\text{下} - \text{上})^2/4$ および 内² $= \text{長}^2 + (\text{下} + \text{上})^2/4$ より外、長を消去して、

$$\text{内}^2 - (\text{只} - \text{下})^2/4 = (\text{下} + \text{上})^2/4 - (\text{下} - \text{上})^2/4$$

を得る。これを整理すると、 $4 \text{ 内}^2 - \text{只}^2 + 2 \text{ 只} \times \text{下} - \text{下}^2 = 4 \text{ 上} \times \text{下}$ となり、真術を得る。

$$(\text{只}^2 - 4 \text{ 内}^2) + (-2 \text{ 只} + 4 \text{ 上}) \text{ 下} + \text{下}^2 = 0 \quad \dots (1) \quad \text{真術}$$

傍書式の実級は正の場合と負の場合が起こる。廉と同符号のときは正商を持たない場合がある。そこで、平方適尽方級法により無商の極を求める。

只云う数を未知数とする。(正実) \times (正廉) $= \text{只}^2 - 4 \text{ 内}^2$ を左に寄せる。

(負方/2)² $= (\text{只} - 2 \text{ 上})^2$ と左に寄せると相消して適尽式を得る。

$$(-\text{上}^2 - \text{内}^2) + \text{只} \times \text{上} = 0 \quad \dots (2),$$

これを解いて、只 $= (\text{上}^2 + \text{内}^2)/\text{上} = 369/12 = 30.75$ 。

また、上底が増大し下底と等しくなるとき (満極)、図形は長方形 (を立てた形) になる。上 = 下で、外 = 長 より、只 - 上 = 2 長。

只云う数を未知数とする。(2 長)² + 4 上² を左に寄せる。4 内² と左に寄せると相消して方程式 $\text{只}^2 - 2 \text{ 只} \times \text{上} + \text{上}^2 + 4 \text{ 上}^2 - 4 \text{ 内}^2 = 0$ を得る。整理して、次を得る。

$$(5 \text{ 上}^2 - 4 \text{ 内}^2) - 2 \text{ 只} \times \text{上} + \text{只}^2 = 0 \quad \dots (3)$$

また、長が減少して0になったときの干極の場合、図形は一直線になる。このとき長=0なので、 $(下-上)/2=外$, $(下+上)/2=内$, 只=2下-上。

只云う数を未知数とする。只+上=2下であるので2下+2上を左に寄せる。4内と左に寄せたると相消し $(只+上)+2上-4内=0$ を得る。したがって、

$$(3上-4内)+只=0 \quad \dots (4)$$

替数 上底を1尺2寸、内斜を1尺5寸と定め、真術が解を持つような只云う数を求める。

上底と下底が等しくなるとき、只云う数の極は3尺である。

長が0となるとき、只云う数の極は2尺4寸である。

術 前段式(2) $(-上^2-内^2)+只 \times 上=0$ より、 $只=(上^2+内^2)/上=369/12=30.75$ である。只<30.75のとき商をつ。只>30.75のとき商を持たない。

中段式(3)

$$(5上^2-4内^2)-2只 \times 上+只^2=0$$

$$4内^2-5上^2=180d \text{ 負実}, 2上=24 \text{ 負方}, 1 \text{ 正廉より},$$

$$-180-24只+只^2=0,$$

因数分解できて、 $(只-30)(只+6)=0$, 只=30.

只<30のとき、上底<下底、只>30のとき、上底>下底。条件に背き、正商が有ってもこの商を用いない。

後段式(4)より、只>24のとき、長を得る。只<24ならば、長を得られない。

加辞 $5上^2+只^2>4内^2+2上 \times 只$ のとき上>下となる。

只+3上<4内のとき長は求められない。

術 只云う数を商として中段の傍書式(3)に於いて、開出法により、

$$f(只)=5上^2+只^2-4内^2-2只 \times 上$$

の変式を求めると、次のようになる。

$$f(X+只)=f(只)+f'(只)X+\frac{1}{2}f''(只)X^2, \quad f'(只)=2只-2上, \quad \frac{1}{2}f''(只)=1.$$

実級 $f(只)$ が正のとき正の商を持たない。

また、只云う数を商として後段の傍書式(4)に於いて、開出法により、

$$g(只)=3上-4内+只$$

の変式を求めれば、次を得る。

$$g(X+只)=g(只)+g'(只)X, \quad g'(只)=1$$

実級 $g(只)$ が負のとき変式は負の商を持たない。

[第 18-26 問] 四角錐台がある。体積は 254 寸である。只云う、上面の一边 (上方) と底面の一边 (下方) の和は 1 尺 3 寸。又云う、上面の一边は高さより 1 寸多い。上面の一边を問う。

暗黙裡に、 $0 < \text{上方} < \text{下方}$ が仮定されている。

題中の数値を用いて上面の一边を求める方程式は次の通り。

$$-931 + 182 \text{上} - 14 \text{上}^2 + \text{上}^3 = 0$$

この方程式を解き、 $\text{上} = 7$ を得る。したがって、 $\text{下} = 6$ 、 $\text{高} = 6$ なので、 $\text{上} > \text{下}$ となり、得られた正の商は問題の条件に反する。

次に、先の方程式を得るための傍書式を求める。

$$\begin{aligned} 3 \text{積} &= \text{高} (\text{上}^2 + \text{上} \times \text{下} + \text{下}^2) \\ &= (\text{上} - \text{多}) \{ \text{上}^2 + \text{上} (\text{和} - \text{上}) + (\text{和} - \text{上})^2 \} = (\text{上} - \text{多}) (\text{上}^2 - \text{上} \times \text{和} + \text{和}^2) \\ &= \text{上}^3 + (-\text{多} - \text{和}) \text{上}^2 + (\text{多} \times \text{和} + \text{和}^2) \text{上} - \text{多} \times \text{和}^2 \end{aligned}$$

より、

$$(-\text{多} \times \text{和}^2 - 3 \text{積}) + (\text{多} \times \text{和} + \text{和}^2) \text{上} + (-\text{多} - \text{和}) \text{上}^2 + \text{上}^3 = 0 \quad \dots \quad \text{真術}$$

を得る。傍書式をみると定数項 (実級) が負であるので、与えられた数の多少に依らず正商を得る。正商が条件にあう限界 (極) を求める。

また、上の面の一边が増大し下の面の一边と等しくなるとき、四角柱になる。このとき、 $\text{上} = \text{下}$ なので、 $\text{和} = 2 \text{上} = 2 \text{下}$ である。積 (体積) を未知数とする。以下の式 (1) に見るように、只云う数 (和) について 3 次式になるが、積は 1 次で次数が低いので、積を未知数とする。

$$3 \text{積} = \text{高} (\text{上}^2 + \text{上} \times \text{下} + \text{下}^2) = 3 \text{高} \times \text{上}^2.$$

$\text{高} = \text{上} - \text{多}$ 、 $\text{上} = \text{和}/2$ より、 $\text{積} = (\text{和}/2 - \text{多})(\text{和}/2)^2$ を得る。これを整理して、

$$(\text{和}^3 - 2 \text{多} \times \text{和}^2) - 8 \text{積} = 0 \quad \dots \quad (1)$$

替数 和 を 1 尺 3 寸と定め、 上 が 高 より 1 寸多いとする。

上方 が増大し 下方 と等しくなるときの積の極は 232.375 寸である。

術 $\text{上} = \text{下}$ のときの方程式 (1) より、

$$\text{積} = (\text{和} - 2 \text{多}) \text{和}^2 / 8 = 1859 / 8 = 232.75$$

である。

$\text{積} < 232.375$ のとき、 $\text{下} > \text{上}$ となり、問題の条件に適する。

$\text{積} > 232.375$ のとき、 $\text{下} < \text{上}$ となり、問題の条件に背く。

加辞 $8 \text{積} + 2 \text{和}^2 \times \text{多} > \text{和}^3$ のとき $\text{下} < \text{上}$ となる。

術 $\text{上} = \text{下}$ のときの方程式 (1) に於いて、開出法により、

$$f(\text{積}) = \text{和}^3 - 2 \text{和} \times \text{多} - 8 \text{積}$$

の変式を求めれば、次を得る。

$$f(X + \text{積}) = f(\text{積}) + f'(\text{積})X, \quad f'(\text{積}) = -8$$

変式の実級 $f(\text{積})$ が負のとき、変式は負の商を持つ。したがって、 $\text{積} = 232.75 - X > 232.75$ で $\text{下} < \text{上}$ で、題意に背く。

参考文献

- [明治前] 日本学士院編『明治前日本数学史第二巻』新訂版, 井上書店, 1979 年. (原著は, 1954-1960 年に刊行)
- [加藤 1957] 加藤平左エ門『和算ノ研究 方程式論』覆刻版 佐々木力解説, 海鳴社, 2011 年 (原著は 1957 年)
- [関全集] 平山諦他編『関孝和全集』大阪教育図書, 1974 年
- [後藤 2001] 後藤武史「大成算経の前集の研究」, 数学史の研究, 数理解析研究所講究録 1195(2001), 128-138.
- [後藤 2002] 後藤武史「大成算経における判別式の求め方」, 数学史の研究, 数理解析研究所講究録 1257(2002), 186 - 197.
- [柏原 2005] 柏原信一郎『『大成算経』巻之十六 題術辯について』, 数学史の研究, 数理解析研究所講究録 1444(2005), 209 - 221.
- [小松 2007] 小松彦三郎「『大成算経』校訂本作成の現状報告」, 数学史の研究, 数理解析研究所講究録 1546(2007), 140 - 156.
- [藤井 2012] 藤井康生「大成算経巻之十六 (權術) について」, 数学史の研究, 数理解析研究所講究録 1787(2012), 65 - 78.

email: yfujii@pearl.ocn.ne.jp